Dossier n°78 : Exemples de recherche de primitives par des méthodes variées.

Rédigé par Cécile COURTOIS, le 5 décembre 2003
cecile-courtois@wanadoo.fr

I Situation par rapport aux programmes.

La notion de primitive est introduite en Terminale S et ES, après la notion d'intégrale en Terminale S et dans le cadre de l'étude des fonctions en Terminale ES.

Je choisis donc de situer ce dossier au niveau de la Terminale S, pour disposer d'un maximum d'outils.

II Commentaires généraux.

II.1 A propos du sujet.

En Terminale, les primitives d'une fonction sont introduites de la manière suivante :

Définition :

f est une fonction définie sur un intervalle **I. Une primitive de f sur I** est une fonction dérivable sur **I** telle que, pour tout x de **I**, F'(x) = f(x).

On en déduit donc, de façon immédiate, qu'on peut déterminer une primitive de certaines fonctions par lecture « inverse » du tableau des dérivées usuelles.

Toutefois, il existe certains cas de fonctions pour lesquels cette méthode ne convient pas ; notamment :

- certains produits de fonctions et notamment les polynômes trigonométriques ;
- par suite, certaines fonctions rationnelles.

Le but de ce dossier est donc de présenter des exemples de recherche de primitives de fonctions qu'on ne peut déterminer par lecture inverse du tableau des dérivées usuelles.

II.2 A propos des exercices.

J'ai donc choisi de vous présenter quatre exercices présentant divers cas de recherche de primitives par différentes méthodes :

- l'exercice n°1propose de déterminer les primitives de deux polynômes trigonométriques, soit par linéarisation, soit par transformation d'écriture ;
- l'exercice n°2 propose de déterminer une primitive d'un produit de fonctions par intégration par parties ou par un raisonnement d'analyse/synthèse ;
- l'exercice n°3 propose de déterminer une primitive d'une fonction rationnelle par intégration par parties et par décomposition en éléments simples ;
- l'exercice n°4 propose de déterminer une primitive d'un produit de fonctions soit par intégration par parties, soit par dérivation.

Un des outils majeurs du calcul de primitives d'un produit de fonctions est l'intégration par parties dont je vous rappelle le principe :

Théorème 2 :

u et v sont deux fonctions dérivables sur un intervalle I telles que leurs dérivées u' et v' sont continues sur I. Alors pour tous réels a et b de I :

$$\int_a^b u(t)v'(t)dt = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u'(t)v(t)dt$$

III Présentation des exercices.

III.1 Exercice n°1.

But : Déterminer les primitives de $x \to \sin^4 x$ et $x \to \cos^3 x$ sur IR.

Méthode :

- Pour $x \to \sin^4 x$, on utilise les formules trigonométriques.
- Pour $x \to \cos^3 x$, il n'est pas nécessaire de linéariser, il suffit d'utiliser des relations trigonométriques.

Outils :

- Relations trigonométriques
- Théorème 3 :

F est une fonction définie sur un intervalle I. Si F est une primitive de f sur I alors f admet une infinité de primitives. Toute autre primitive de f sur I est définie par G(x) = F(x) + k où k est une constante réelle.

III.2 Exercice n°2.

But : déterminer s'il existe un polynôme P tel que la fonction F définie par $F(x) = P(x)e^{-x}$ est une primitive de $f : t \to (t^3 + t^2 + t + 1)e^{-x}$.

Méthode :

1. Raisonnement par analyse/synthèse.
2. Trois intégrations par parties successives.

Outils :

- Degré d'un polynôme ;
- Deux polynomes non nuls sont égaux si et seulement si leurs coefficients respectifs sont égaux.
- Théorème 2.

III.3 Exercice n°3.

But : Calculer, pour x > 1, $J(x) = \int_2^x \frac{t \ln t}{(t^2 - 1)^2} dt$.

Remarque : Cet exercice répond bien au problème posé puisque J est la primitive de $t \to \frac{t \ln t}{(t^2 - 1)^2}$ qui s'annule en 2.

Méthode :

- Déterminer une primitive de $t \to \frac{t}{(t^2 - 1)^2}$ par lecture inverse du tableau des dérivées usuelles.
- Déterminer une primitive de $t \to \frac{1}{t(t^2 - 1)}$ par décomposition en éléments simples.

- Calcul de J(x) par intégration par parties.

Outils :
- Théorème 2.

III.4 Exercice n°4

But : Déterminer une primitive F de $t \rightarrow e^{t}\sin(2t)$ sur IR.

Méthodes :
1. Réaliser deux intégrations par parties pour obtenir une équation d'inconnue F(x).
2. f est solution de l'équation différentielle ay'' + by' = y sur IR.

Outils :
- théorème 2

IV Enoncés et références des exercices.

IV.1 Exercice n°1 (TP n°1 p 99, Transmath TS 1998).

1. Soit $f : IR \to IR$ définie par $f(x) = \sin^4 x$.
    a) Exprimer $\sin^2 x$ en fonction de $\cos(2x)$ puis $f(x)$ en fonction de $\cos(2x)$ et $\cos(4x)$.
    b) En déduire les primitives de f sur IR.
2. Soit $g : IR \to IR$ définie par $g(x) = \cos^3 x$.
    a) Montrer que, pour tout $x \in IR$, $\cos^3 x = \cos x - \sin^2 x \cos x$.
    b) En déduire les primitives de g sur IR.

IV.2 Exercice n°2 (n°61 p 226, Transmath TS 2002).

Soit f la fonction définie sur Ir par $f(x) = (x^3 + x^2 + x + 1)e^{-x}$. On souhaite savoir s'il existe un polynôme P tel que la fonction F définie par $F(x) = P(x)e^{-x}$ est une primitive de f sur IR.

1. Première méthode

a) Supposons l'existence d'un tel polynôme P. Montrer que, pour tout x de IR, $P'(x) - P(x) = x^3 + x^2 + x + 1$.

b) Prouver que P est de degré inférieur ou égal à 3.

c) On pose, pour tout réel x, $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Déterminer a, b, c et d.

d) Prouver que le polynôme P est solution du problème posé. Conclure.

2. Deuxième méthode :

Réaliser trois intégrations successives par parties et vérifier que la fonction F est bien du type $x \to P(x)\, e^{-x}$ avec P polynôme de degré 3.

IV.3 Exercice n°3 (n°82 p 141, Terracher TS 2002).

1. On pose, pour tout $t \neq -1$ et $t \neq 1$, $f(t) = \dfrac{t}{(t^2-1)^2}$. Déterminer une primitive F de f sur l'intervalle $]1\,;+\infty[$.
2. On pose, pour $t \neq 0$, $t \neq 1$ et $t \neq -1$, $g(t) = \dfrac{1}{t(t^2-1)}$. Déterminer les trois nombres réels a, b et c tels que, pour tout t réel, $t \neq 0$, $t \neq 1$, $t \neq -1$, on ait $g(t) = \dfrac{a}{t} + \dfrac{b}{t-1} + \dfrac{c}{t+1}$. En déduire une primitive G de g sur l'intervalle $]1\,;+\infty[$.
3. A l'aide d'une intégration par parties, calculer, pour $x > 1$, $J(x) = \displaystyle\int_2^x \frac{t \ln t}{(t^2-1)^2}\,dt$. On exprimera le résultat sous la forme $J(x) = h(x)\ln x + A\ln(x^2-1) + B$ où A et B sont deux constantes et h une fonction qu'on précisera.

IV.4 Exercice n°4(n°60 p 225, Transmath TS 2002).

La fonction f est définie sur IR par $f(x) = e^x \sin(2x)$. On souhaite trouver une primitive F de f sur IR.

1. Justifier que la fonction F définie par $F(x) = \int_0^x f(t)dt$ est la primitive de f s'annulant en zéro.
2. A l'aide d'une intégration par parties, montrer que $F(x) = e^x \sin(2x) - 2 \int_0^x e^t \cos(2t)dt$.
3. Calculer judicieusement $\int_0^x e^t \cos(2t)dt$ puis en déduire l'expression de F(x).
4. Autre méthode :
    a) Pour tout réel x, calculer $f'(x)$ et $f''(x)$.
    b) Exprimer f(x) comme combinaison de $f'(x)$ ey $f''(x)$ du type $f(x) = af''(x) + bf'(x)$.
    c) En déduire une primitive de f sur IR.